

XXX OLIMPIÁDA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
PRUEBA DE SELECCIÓN
PRIMER DÍA (20/08/15)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.
--

1. Ana y Beto juegan del siguiente modo. Ana escribe todos los dígitos de 0 a 9 alrededor de una circunferencia, una vez cada dígito, en el orden que prefiera. A continuación, Beto elige un dígito y recorre la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, comenzando por el dígito elegido, y agrupa los dígitos consecutivos en parejas. De este modo forma cinco números de dos dígitos (uno puede comenzar con 0). Finalmente suma esos cinco números y Ana debe pagarle esa suma en pesos. Determinar el menor valor que Ana fatalmente perderá en este juego.

2. Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para todos x, y reales se verifica

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

3. Sea O el centro de la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo ABC . Consideramos la recta ℓ que pasa por el punto medio del lado BC y es perpendicular a la bisectriz del ángulo BAC . Determinar el valor del ángulo BAC si la recta ℓ pasa por el punto medio del segmento AO .

XXX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

SEGUNDO DÍA (21/08/15)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Un cuadrado $ABCD$ tiene sus vértices sobre una circunferencia de centro O . Sea E el punto medio del lado AD . La recta CE corta nuevamente a la circunferencia en F . Las rectas FB y AD se cortan en H . Demostrar que $HD = 2AH$.

5. Hallar todas las ternas (p, q, r) de números primos (positivos) que satisfacen

$$p^4 + 2p + q^4 + q^2 = r^2 + 4q^3 + 1.$$

6. En un tablero de $2n \times 2n$ exactamente la mitad de las casillas están coloreadas de negro y la otra mitad, de blanco. En cada paso se puede elegir un cuadrado de 2×2 del tablero y reflejar sus casillas con respecto a la recta horizontal que divide a ese cuadrado por la mitad o con respecto a la recta vertical que divide a ese cuadrado por la mitad. Determinar los enteros positivos n para los que se puede, a partir de cualquier configuración inicial, obtener mediante pasos sucesivos un tablero totalmente coloreado como el de ajedrez.